

# **Sixième partie:**

## **Mouvement relatif et changement de référentiel en mécanique newtonienne**

### Notions abordées:

- 6.1 Référentiel et repères
- 6.2 Vitesse et accélération relatives
- 6.3 Dynamique dans un référentiel en mouvement, forces d'inertie
- 6.4 Loi d'inertie et référentiels d'inertie
- 6.5 Dynamique terrestre

### Buts:

- comprendre la différence entre référentiel et repère
- comprendre la notion de référentiel d'inertie
- assimiler les bases de la mécanique Newtonienne classique

# 6.1 Mouvement et référentiel

- La description du mouvement d'un point matériel ou d'un système (vitesses, accélérations, forces, ...) se fait nécessairement par rapport à un référentiel :
  - Référentiel = ensemble d'au moins 4 points non coplanaires et immobiles les uns par rapport aux autres (= solide indéformable !)
    - on peut associer à chaque référentiel un observateur et ses instruments de mesure, immobiles dans ce référentiel (ils « font partie » du référentiel)
    - décrire un mouvement dans un certain référentiel consiste alors à se mettre à la place de cet observateur
  - Exemples:
    - le laboratoire (= la Terre)
    - un carrousel
    - un ascenseur
- Le choix du référentiel est a priori arbitraire, mais ...
  - ... tous les référentiels sont-ils équivalents ?
  - ... les lois de la physique sont-elles les mêmes dans tous les référentiels ?
  - ... permettent-elles de mettre en évidence des référentiels privilégiés ?

# 6.1 Changement de référentiel

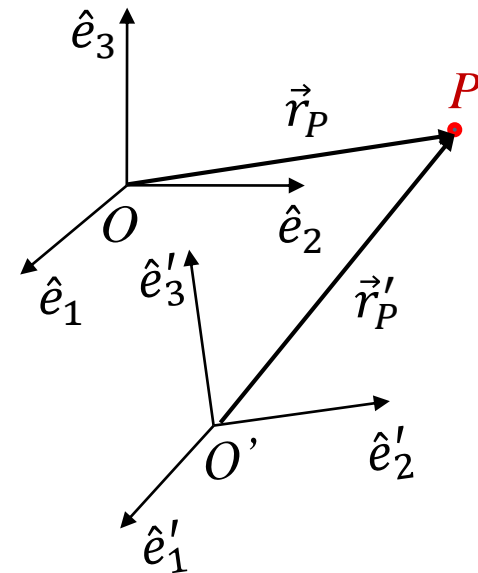
- Point matériel  $P$  décrit dans deux référentiels différents :

- Dans un référentiel  $R$  auquel est lié le repère:  $O \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$

$$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i, \quad \vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx_i}{dt} \hat{e}_i, \quad \vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dv_i}{dt} \hat{e}_i$$

- Dans un autre référentiel  $R'$  auquel est lié le repère :  $O' \hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$

$$\vec{r}'_P = \overrightarrow{O'P} = \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{e}'_i, \quad \vec{v}'_P = \frac{d\vec{r}'_P}{dt'} = \sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt'} \hat{e}'_i, \quad \vec{a}'_P = \frac{d\vec{v}'_P}{dt'} = \sum_{i=1}^3 \frac{dv'_i}{dt'} \hat{e}'_i$$



- Postulats de la mécanique classique (non-relativiste):

1. Le temps est absolu :

$$t' = t + \text{constante} \Rightarrow \frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}$$

2. L'espace est absolu :

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P = \vec{r}'_Q - \vec{r}'_P \quad \forall P, Q$$

- Intervalle de temps et  
- longueur  
ne dépendent pas du  
référentiel

- Conséquence:

- un « solide » dans  $R$  est aussi un « solide » dans  $R'$ .
- son mouvement est décrit par les vitesses instantanées de translation et de rotation de  $R'$  par rapport à  $R$ :

$$\vec{v}_{O'} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OO'} \quad \text{et} \quad \vec{\omega}$$

# 6.2 Transformation des vitesses

$$\underbrace{\overrightarrow{OP}}_{\vec{r}_P} = \underbrace{\overrightarrow{OO'}}_{\vec{r}_{O'}} + \underbrace{\overrightarrow{O'P}}_{\vec{r}'_P}$$

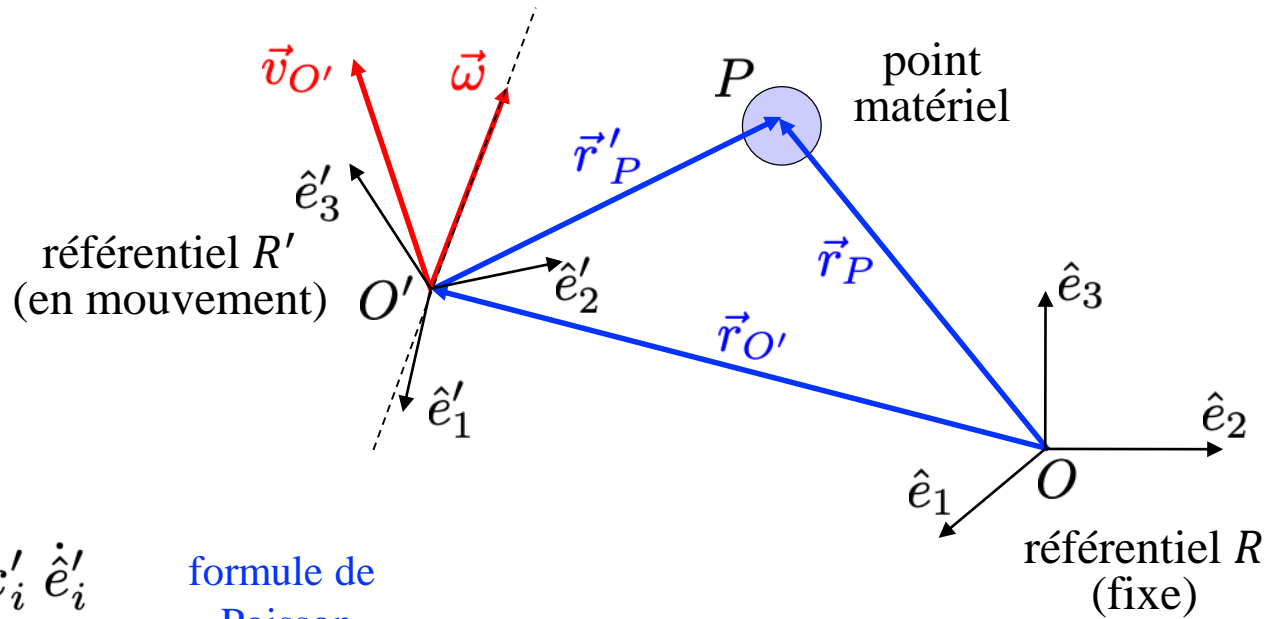
$$\frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_P}{dt}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \frac{d}{dt} \sum x'_i \hat{e}'_i$$

$$= \vec{v}_{O'} + \sum \dot{x}'_i \hat{e}'_i + \sum x'_i \dot{\hat{e}}'_i$$

formule de Poisson

$$= \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \sum x'_i \underbrace{\vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i}$$



$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

vitesse d'entraînement

vitesse de  $P$  par rapport à  $R'$  (relative)

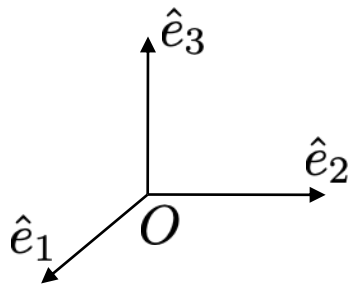
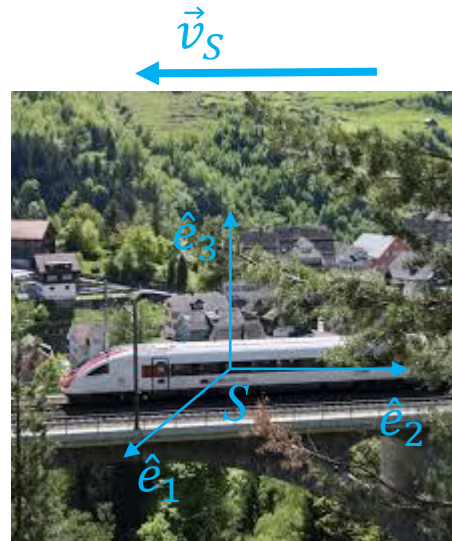
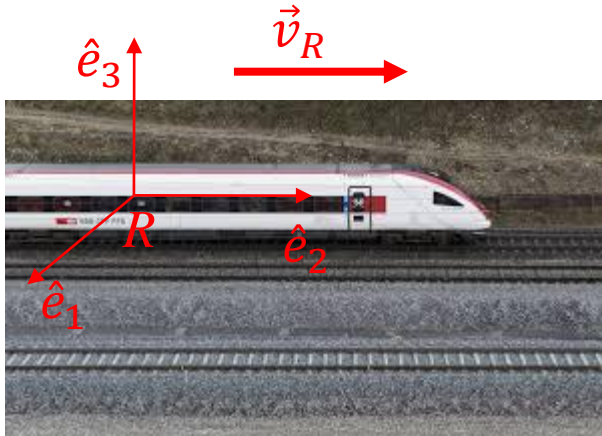
vitesse de  $P$  par rapport à  $R$  (absolue)

## Cas particuliers :

- Si  $\omega = 0$ , i.e.  $R'$  est en translation par rapport à  $R$ , on obtient la loi d'addition des vitesses :

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P$$

# 6.2 Ex.: trains en mouvement



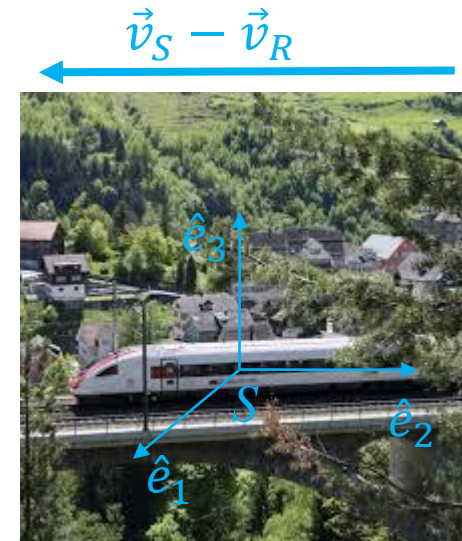
Observateur  $O$  à l'arrêt sur le quai:  
 $\vec{v}_O = 0$

$\vec{v}_R$  et  $\vec{v}_S$  sont les vitesses mesurées  
 par l'observateur  $O$

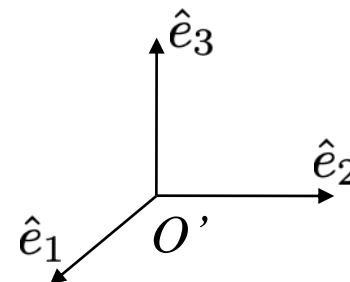
Si  $L$  est la distance entre les deux trains,  
 ils vont se croiser après  $\Delta t = \frac{L}{\vec{v}_R - \vec{v}_S}$

Par rapport à l'observateur  $R$  assis  
 sur le train rouge:  $\vec{v}_R = 0$

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_{O'} = \vec{v}_S - \vec{v}_R$$



$$\vec{v}_{O'} = -\vec{v}_R$$



## 6.2 Transformation des accélérations

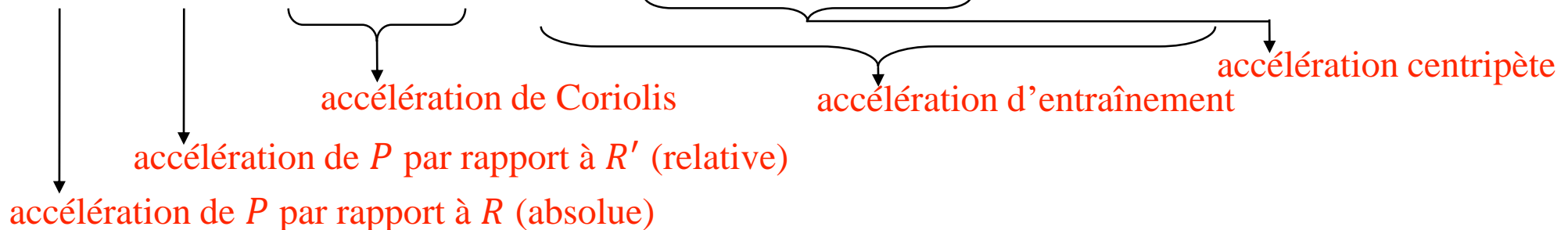
$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P} \Rightarrow \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'_P}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P})$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \frac{d}{dt} \sum \dot{x}'_i \hat{e}'_i + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt} \sum x'_i \hat{e}'_i + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

$$= \vec{a}_{O'} + \sum (\ddot{x}'_i \hat{e}'_i + \dot{x}'_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i) + \vec{\omega} \wedge \sum (\dot{x}'_i \hat{e}'_i + x'_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}'_i) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

$$= \vec{a}_{O'} + \underbrace{\sum \ddot{x}'_i \hat{e}'_i}_{\vec{a}'_P} + 2\vec{\omega} \wedge \underbrace{\sum \dot{x}'_i \hat{e}'_i}_{\vec{v}'_P} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \underbrace{\sum x'_i \hat{e}'_i}_{\overrightarrow{O'P}}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}$$



Cas particuliers : Si  $\omega = 0$  et  $d\omega/dt = 0$ , i.e.  $R'$  est en translation par rapport à  $R$ , on obtient la **loi d'addition des accélérations**  $\vec{a}_P = \vec{a}'_P + \vec{a}_{O'}$

## 6.3 Dynamique dans un référentiel en mouvement

- Soit  $R$  un référentiel inertiel (= en mouvement rectiligne uniforme) dans lequel la deuxième loi de Newton est valable.

- Pour le point matériel  $P$ , auquel s'appliquent des forces  $\vec{F}^{ext}$  :  $\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a}$

$$\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a}_P = m(\vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P})$$

- Dans un référentiel  $R'$  accéléré par rapport à  $R$ , on a :

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} + \underbrace{\left( -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P - m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) - m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P} \right)}_{\sum \vec{F}^{inertie}}$$

force de Coriolis
force centrifuge



les “forces d’inertie” ne sont pas des vraies forces; il s’agit d’un concept introduit pour rétablir la loi  $\sum \vec{F}^{ext} = m\vec{a}$  dans les référentiels accélérés !

Si  $R'$  est aussi un référentiel inertiel,  $\vec{\omega} = 0, \dot{\vec{\omega}} = 0$  et  $\vec{a}_{O'} = 0 \rightarrow m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext}$

# 6.3 Référentiel en translation non-uniforme

- Poids apparent dans un ascenseur accéléré vers le haut :
  - On mesure le poids par l'extension du ressort
  - Dans le référentiel  $R'$  de l'ascenseur, la masse  $m$  est immobile :

$$\vec{a}'_P = 0$$

- 2ème loi de Newton appliquée à la masse  $m$  dans le référentiel  $R'$  :

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P})$$

$$m\vec{a}'_P = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_{O'} = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a} = \vec{T} + m(\vec{g} - \vec{a})$$

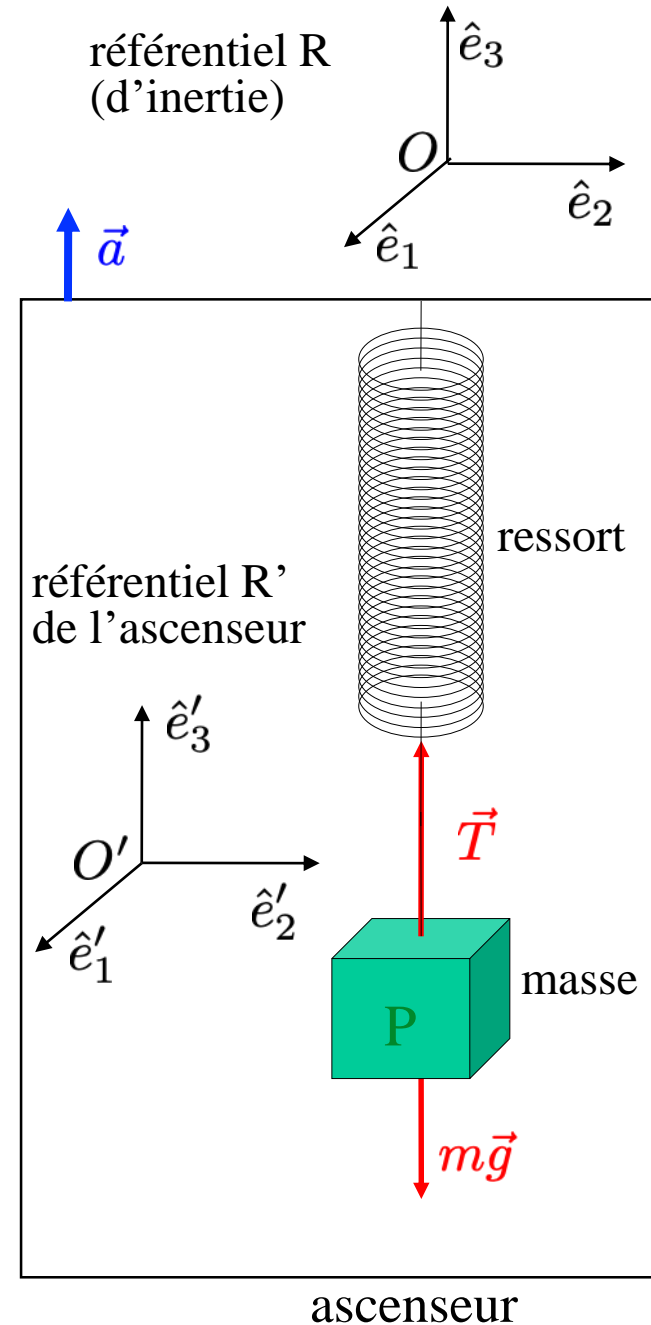
$$\vec{g}^{app} = \vec{g} - \vec{a}$$

**Accélération apparent**

$$0 = T - mg - ma$$

$$T = m(g + a) = \text{poids apparent}$$

- Ex.: - astronaute écrasé contre le siège au départ de la fusée  
 - sensation de flotter si on tombe dans le vide



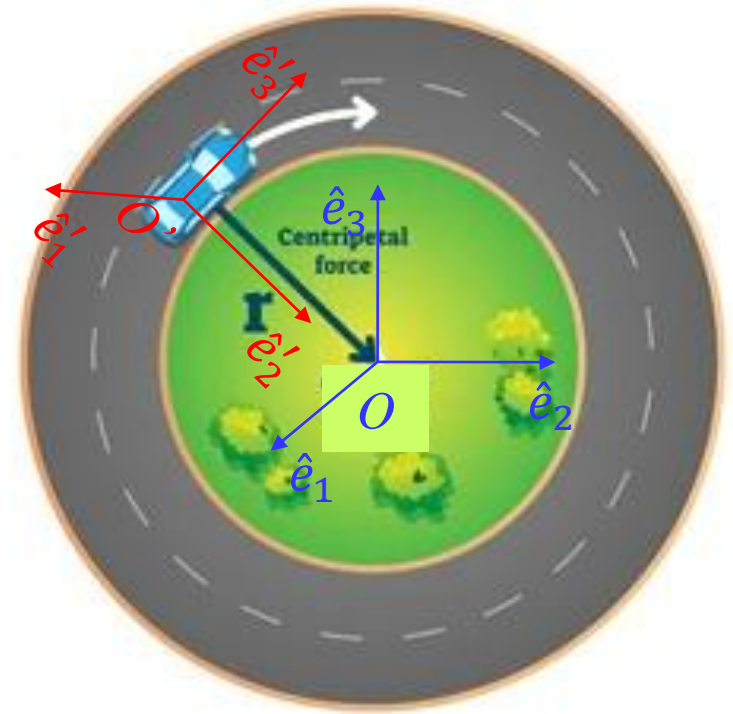
## 6.3 Ex.: voiture dans un virage

référentiel fixe  $R$ :  $O\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$

$$m\vec{a} = \vec{F}^{centripète} = F^{frot} \frac{\vec{r}}{r}$$

Force centripète due au frottement entre pneus et goudron

$$m\vec{a}_P = m \frac{v^2 \vec{r}}{r r} = F^{frot} \frac{\vec{r}}{r}$$



référentiel  $R'$  solidaire avec la voiture P:  $O'\hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$

$$\vec{v}_{O'} = \vec{\omega} \wedge \overline{OP} \quad \vec{a}_{O'} = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overline{OP} \quad O' \equiv P \quad (\overline{O'P} = 0) \quad \vec{v}'_P = 0$$

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + m\vec{\omega} \wedge \overline{O'P})$$

$$m\vec{a}'_P = 0 = F^{frot} \frac{\vec{r}}{r} - \left( 0 + m \frac{v^2 \vec{r}}{r r} + 0 + 0 \right) \quad \Rightarrow \quad F^{frot} \frac{\vec{r}}{r} + \left( -m \frac{v^2 \vec{r}}{r r} \right) = 0$$

L'observateur sur la voiture doit introduire une force  $\vec{F}^{inertie} = -m \frac{v^2 \vec{r}}{r r}$  qui pousse vers l'extérieur du virage (*Force centrifuge*)

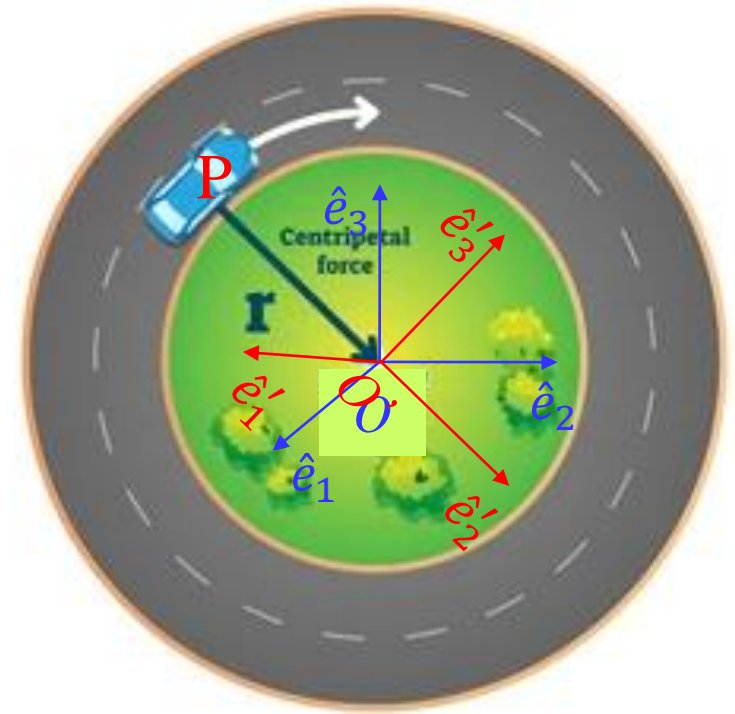
## 6.3 Ex.: voiture dans un virage

référentiel fixe  $R$ :  $O\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$

$$m\vec{a} = \vec{F}^{centripète} = N^{friction} \frac{\vec{r}}{r}$$

Force centripète due à la friction entre pneus et goudron

$$\vec{a}_P = \frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$



shutterstock.com · 1717981621

Référentiel  $R'$  en rotation avec la voiture P:  $O'\hat{e}'_1 \hat{e}'_2 \hat{e}'_3$

$$\vec{v}_{O'} = 0 \quad \vec{a}_{O'} = 0 \quad \vec{v}'_P = 0 \quad \vec{a}'_P = 0 \quad \overline{O'P} = -\vec{r}$$

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P})$$

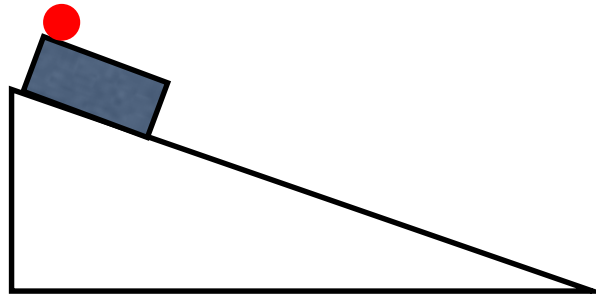
$$m\vec{a}'_P = 0 = N^{friction} \frac{\vec{r}}{r} - \left( 0 + 0 + m \frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r} + 0 \right)$$

L'observateur qui tourne doit introduire une force  $\vec{F}^{inertie} = -m \frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r}$  qui pousse vers l'extérieur du virage

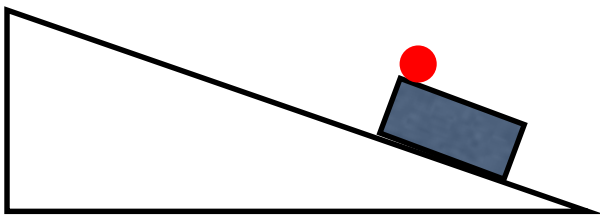
## 6.3 Ex.: rail à air

Considérons une bille (masse  $m$ ) sur une glissière (masse  $M$ ) soutenue par un plan incliné (on néglige tout frottement).

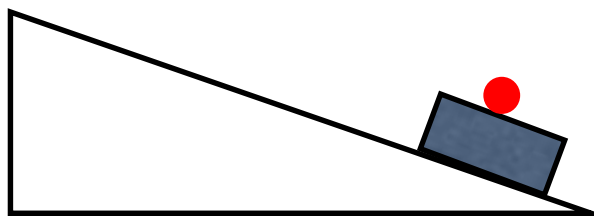
Si on laisse la glissière libre de descendre le long du plan incliné, que fait la bille?



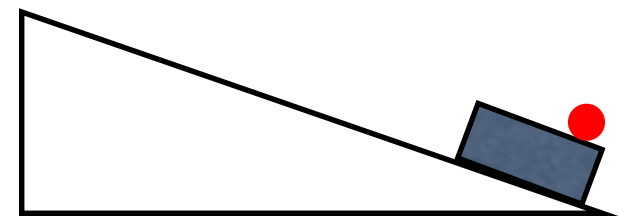
Quiz?



1)



2)



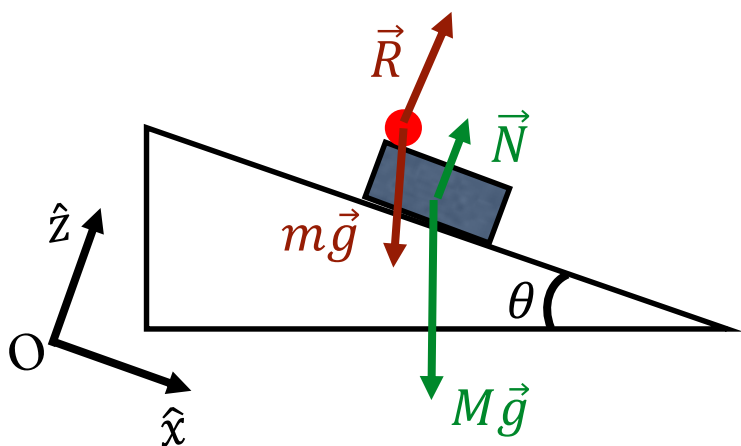
3)

## 6.3 Ex.: rail à air

Considérons une bille (masse  $m$ ) sur une glissière (masse  $M$ ) soutenue par un plan incliné (on néglige tout frottement).

Si on laisse la glissière libre de descendre le long du plan incliné, que fait la bille?

Référentiel inertiel

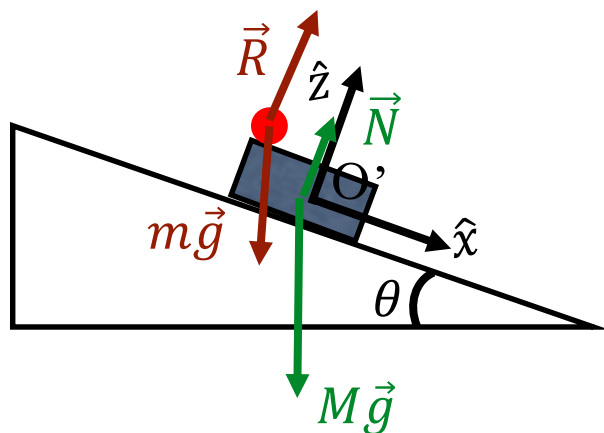


$$mg \sin \theta = m\ddot{x}$$

$$Mg \sin \theta = M\ddot{x}$$

Les deux objets descends avec la même accélération  $\ddot{x} = g \sin \theta$  donc la bille ne bouge pas par rapport à la glissière

Référentiel accéléré



$$m\vec{a}'_p = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_p + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P})$$

$$\hat{x}: ma'_p = mg \sin \theta - m\ddot{x} = mg \sin \theta - mg \sin \theta = 0$$

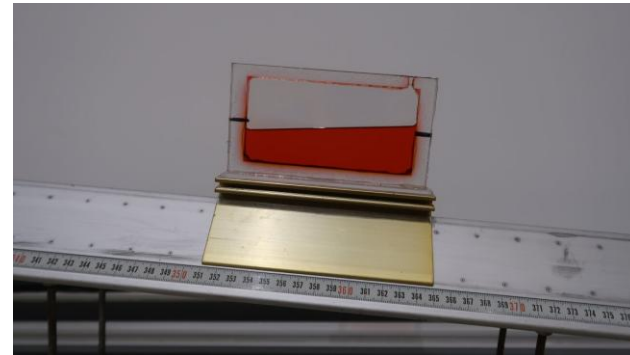
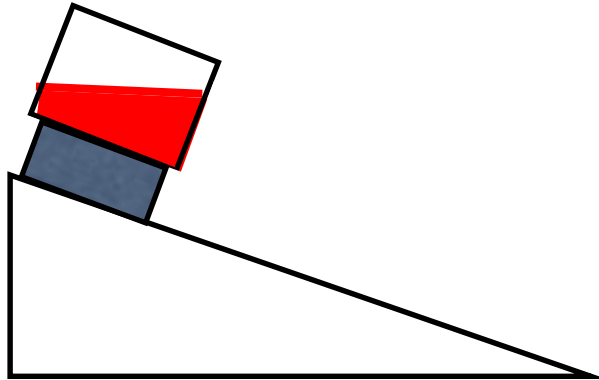
$$Ma'_p = Mg \sin \theta - M\ddot{x} = 0$$

La bille est à repos par rapport à la glissière

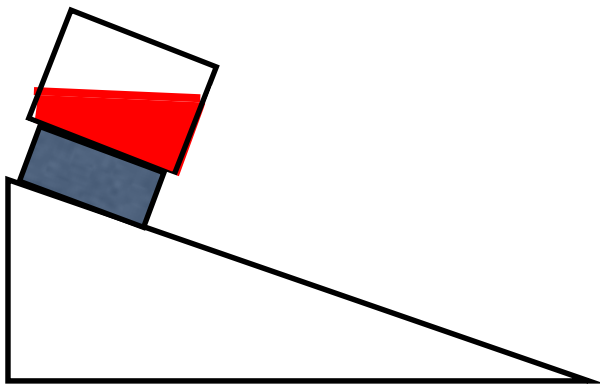
## 6.3 Ex.: rail à air avec un liquide

Considérons un liquide dans une boîte sur une glissière (masse  $M$ ) soutenue par un plan incliné (on néglige tout frottement).

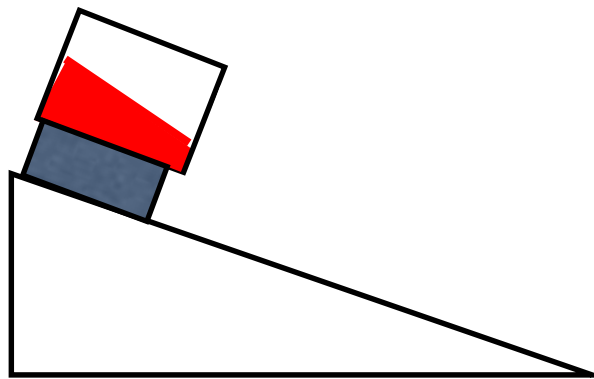
Si on laisse la glissière libre de descendre le long du plan incliné, comment se positionne la surface du liquide?



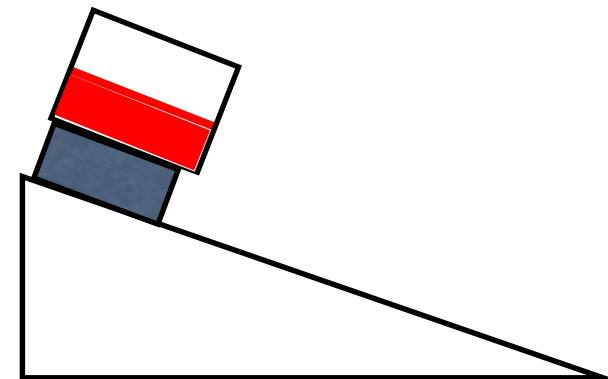
Quiz?



1)



2)

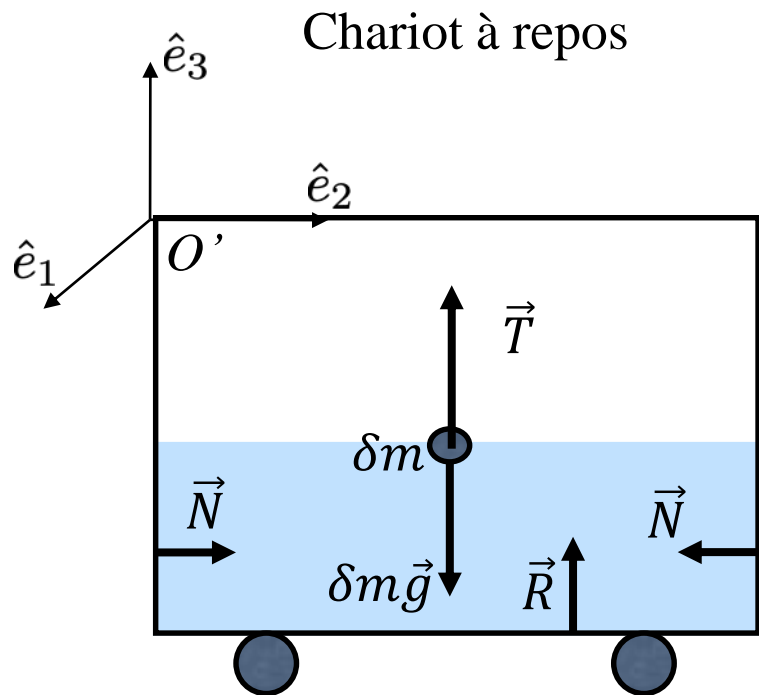


3)

## 6.3 Ex.: fluide en accélération uniforme

$$m\vec{a}'_p = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_p + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P})$$

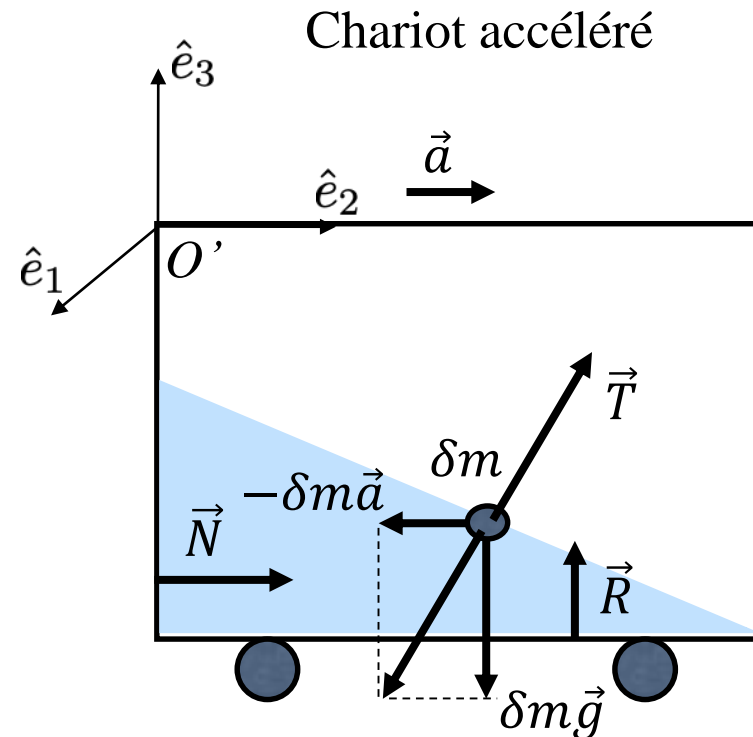
Pour l'observateur  $O'$  sur le chariot, chaque particule  $\delta m$  du liquide est à repos:  $\delta m \vec{a}'_p = 0$



$$\delta m \vec{a}'_p = 0 = \delta m \vec{g} + \vec{N} + \vec{R} = \delta m \vec{g} + \vec{T}$$

$$\vec{T} = -\delta m \vec{g}$$

$\vec{T}$  est la résultante de toutes les forces (= tension) agissantes sur la particule  $\delta m$



$$\delta m \vec{a}'_p = 0 = \delta m \vec{g} + \vec{N} + \vec{R} - \delta m \vec{a}_{O'}$$

$$= \delta m (\vec{g} - \vec{a}) + \vec{T}$$

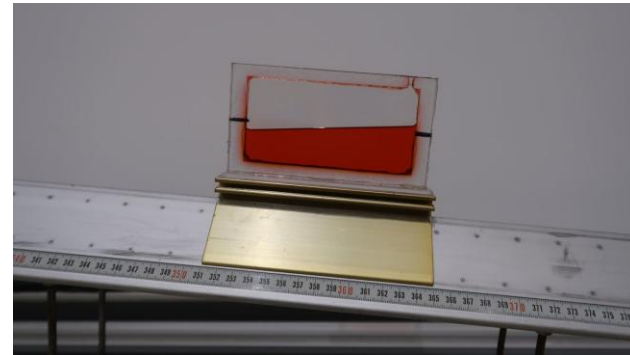
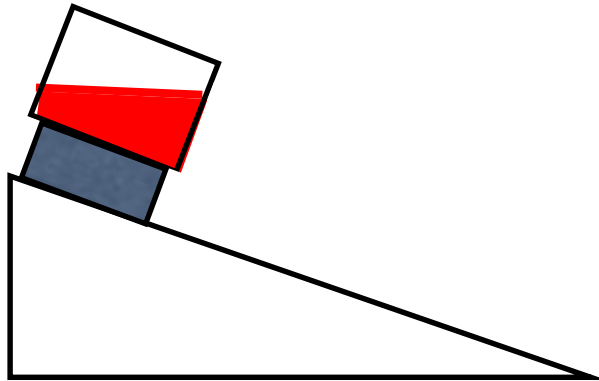
$$\vec{T} = -\delta m (\vec{g} - \vec{a})$$

$\vec{g} - \vec{a}$ : champ de pesanteur apparent

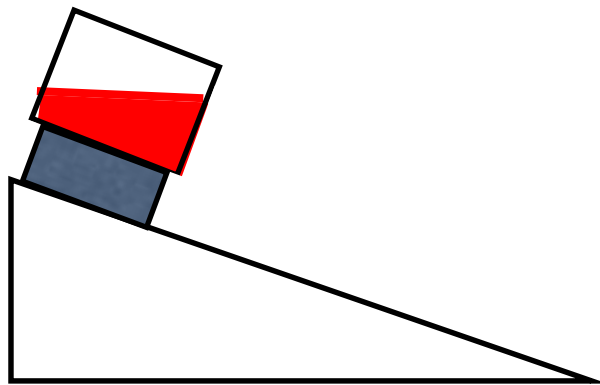
## 6.3 Ex.: rail à air avec un liquide

Considérons un liquide dans une boîte sur une glissière (masse  $M$ ) soutenue par un plan incliné (on néglige tout frottement).

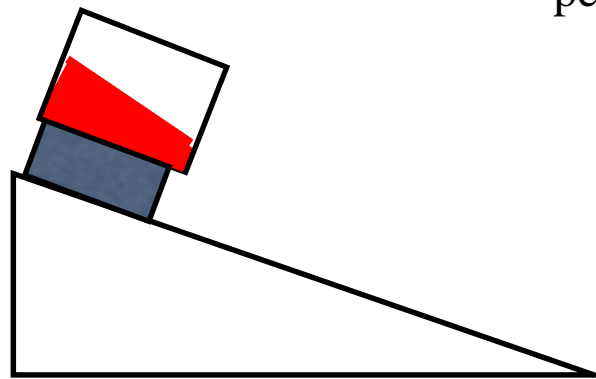
Si on laisse la glissière libre de descendre le long du plan incliné, comment se positionne la surface du liquide?



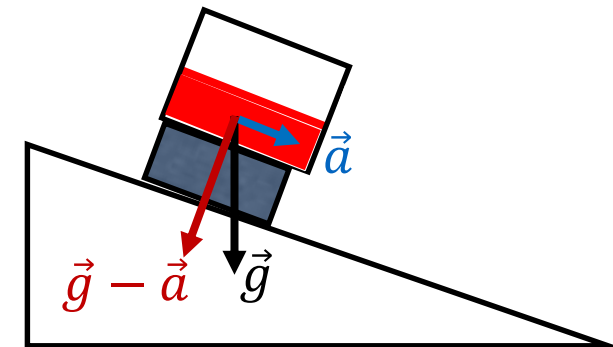
Quiz?



1)



2)



3)

La surface du liquid est perpendiculaire à la gravité apparente

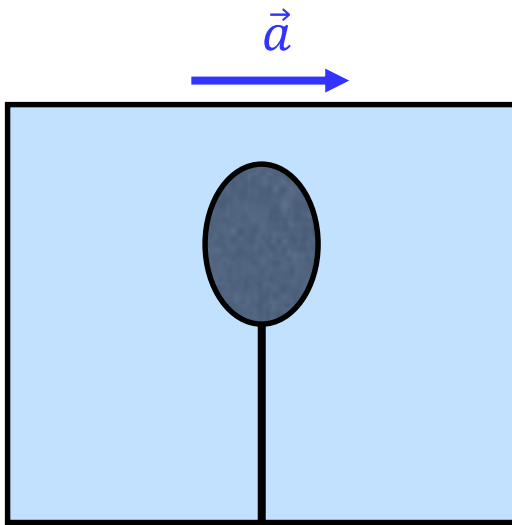
## 6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.

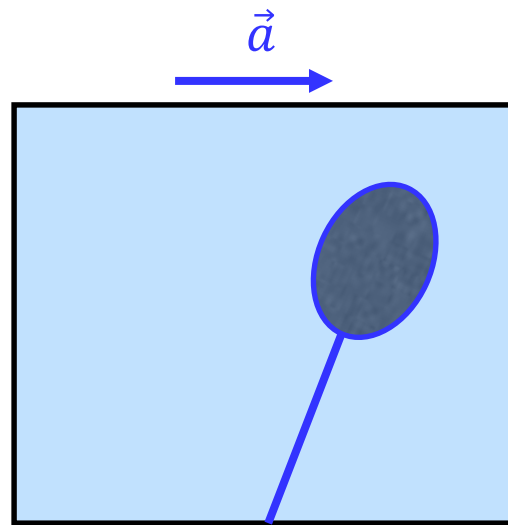
Le support est soumis à **une accélération linéaire  $\vec{a}$** .

Que fait le ballon?

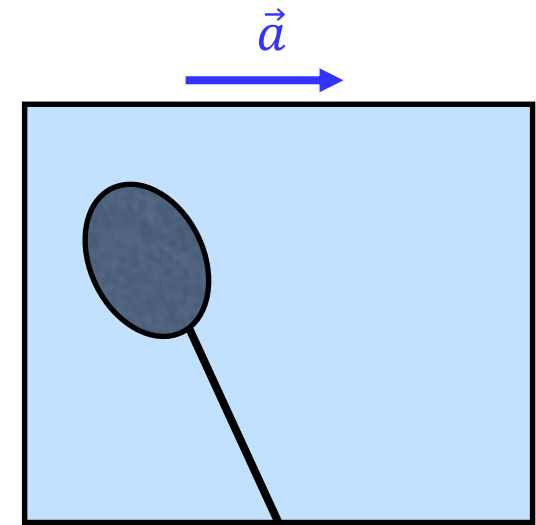
Quiz?



1)



2)



3)

## 6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.

Le support est soumis à une accélération linéaire  $\vec{a}$ .

Que fait le ballon?

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P})$$

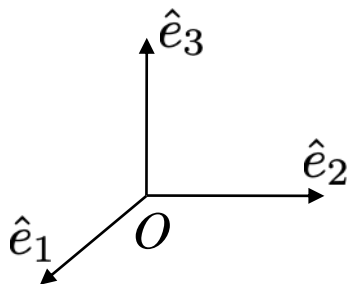
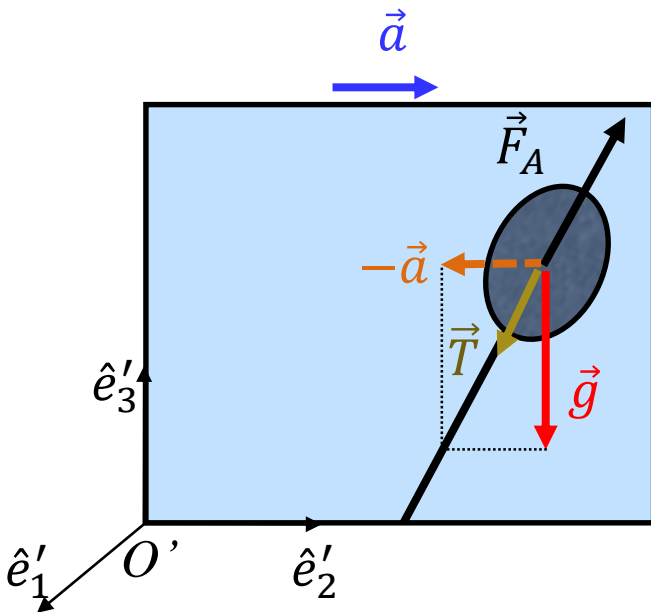
Dans le référentiel en mouvement:

- Le fluide déplacé est soumis à la force  $M\vec{a}'_P = M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d'Archimède exercée par le fluide sur le ballon est:  $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l'équilibre:  $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a} = 0$



$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a} - \vec{F}_A = m(-\vec{g} + \vec{a}) + M(\vec{g} - \vec{a}) = (M - m)(\vec{g} - \vec{a})$$

La Tension du fil est orientée selon  $(\vec{g} - \vec{a})$

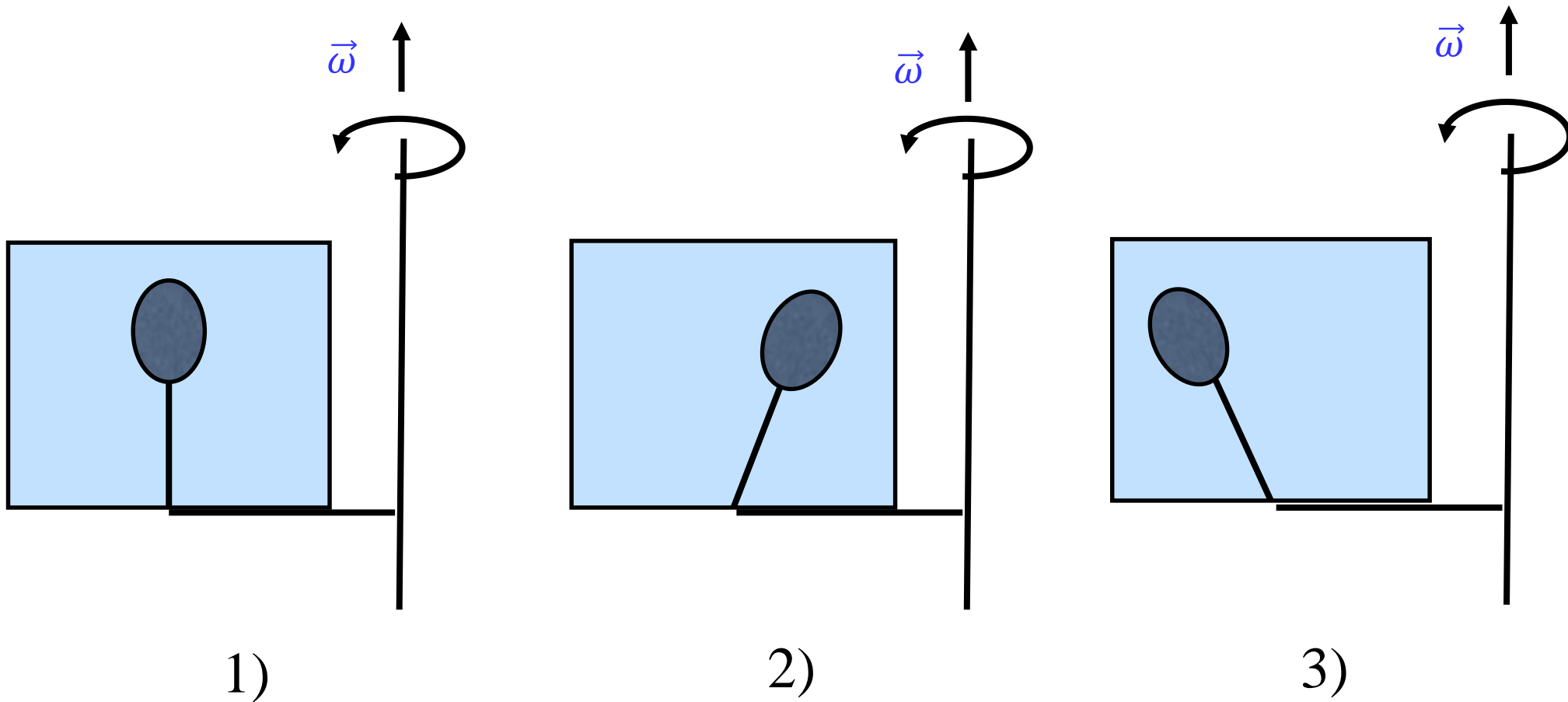


## 6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.

Le support tourne avec **vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  constante**.

Que fait le ballon?



# 6.3 Ex.: ballon d'hélium

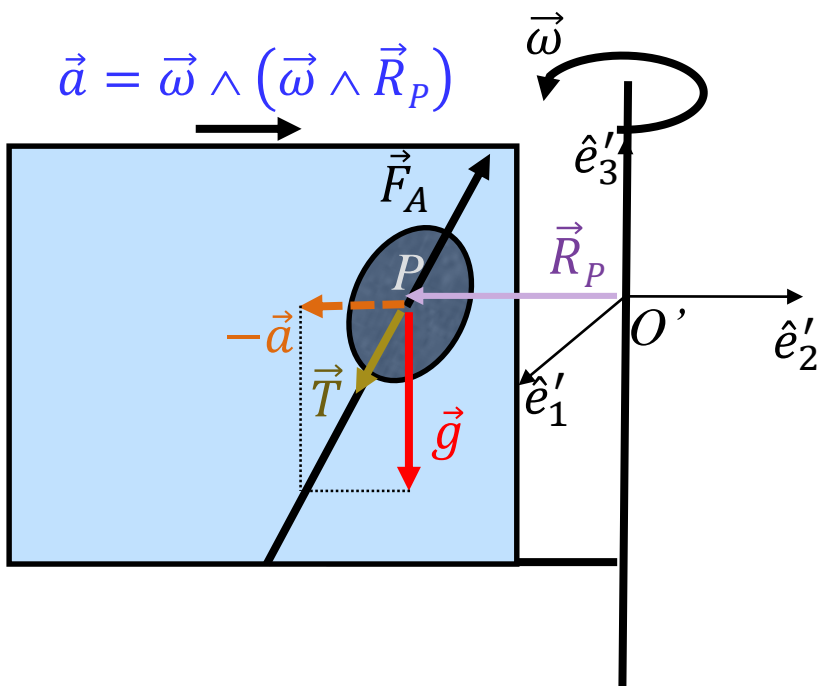
Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.

Le support est soumis à une accélération centripète  $\vec{a}$ .

Que fait le ballon?

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P})$$

$\parallel$   
 $m\vec{a}$



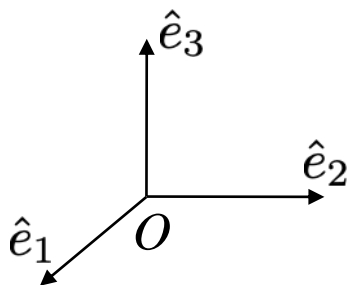
Dans le référentiel  $O'$  en rotation centré sur l'axe de rotation:

- Le fluide déplacé est soumis à la force:  $M\vec{a}'_P = M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d'Archimède exercée par le fluide sur le ballon est:  $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l'équilibre:  $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a} = 0$



$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a} - \vec{F}_A = m(-\vec{g} + \vec{a}) + M(\vec{g} - \vec{a}) = (M - m)(\vec{g} - \vec{a})$$

La Tension du fil est orientée selon  $(\vec{g} - \vec{a})$



# 6.3 Ex.: ballon d'hélium

Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.

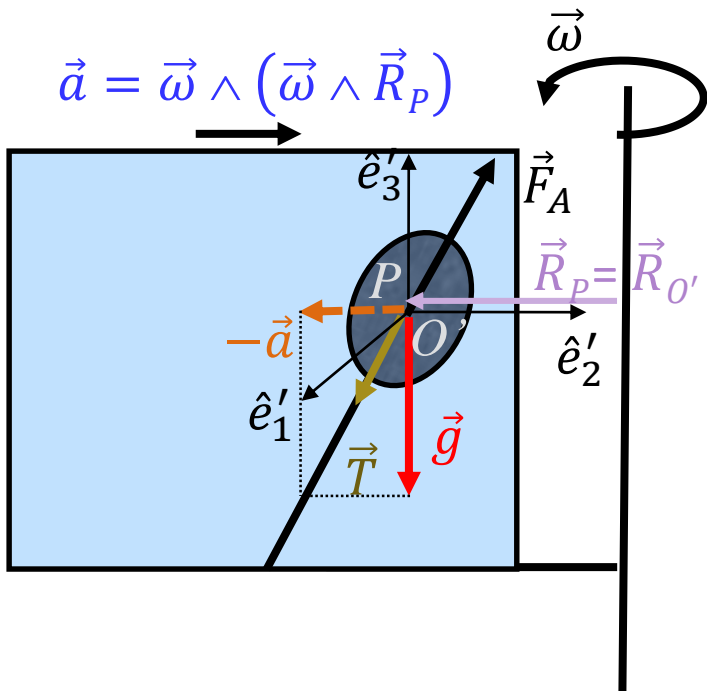
Le support est soumis à une accélération centripète  $\vec{a}$ .

Que fait le ballon?

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P})$$

||

$$m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_{O'}) = m\vec{a}$$



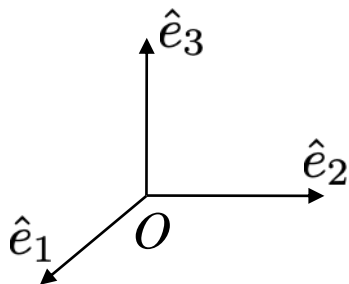
Dans le référentiel  $O'$  en rotation centré sur le ballon  $P$ :

- Le fluide déplacé est soumis à la force:  $M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d'Archimède exercée par le fluide sur le ballon est:  $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l'équilibre:  $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a}_{O'} = 0$



$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a}_{O'} - \vec{F}_A = m(-\vec{g} + \vec{a}) + M(\vec{g} - \vec{a}) = (M - m)(\vec{g} - \vec{a})$$

La Tension du fil est orientée selon  $(\vec{g} - \vec{a})$



# 6.3 Ex.: ballon d'hélium

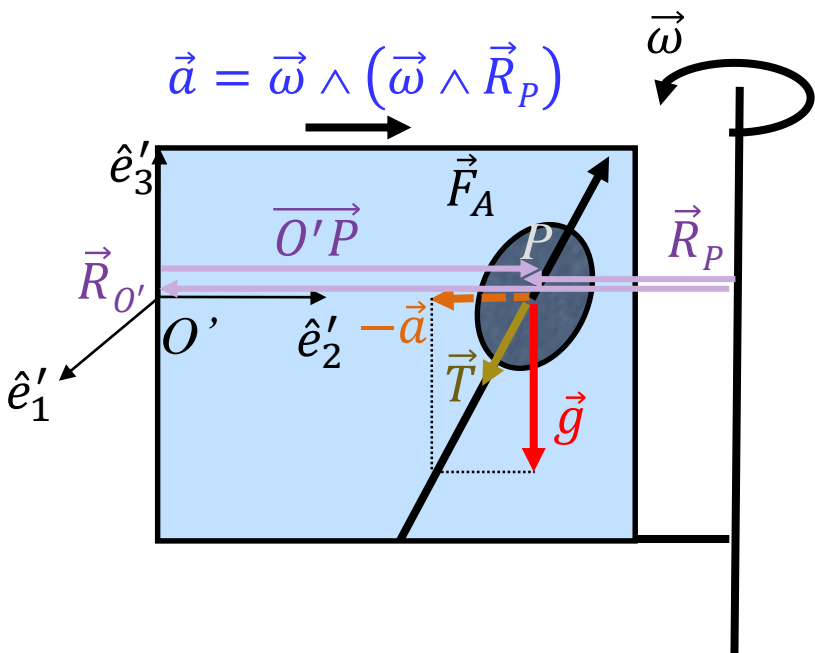
Un ballon d'hélium est accroché à un support et placé sous une cloche hermétique remplie d'air.

Le support est soumis à une accélération centripète  $\vec{a}$ .

Que fait le ballon?

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P})$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_{O'}) & m\vec{a}_c \end{matrix}$$



Dans le référentiel  $O'$  en rotation fixé au support:

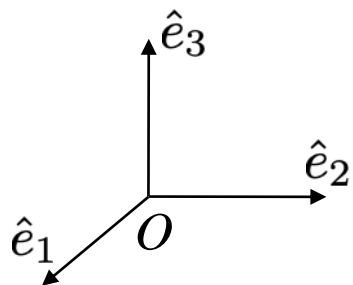
- Le fluide déplacé est soumis à la force:  $M\vec{g} - M\vec{a}$
- Donc, la force d'Archimède exercée par le fluide sur le ballon est:  $\vec{F}_A = -M\vec{g} + M\vec{a}$
- Le ballon est à l'équilibre:  $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A - m\vec{a}_{O'} - m\vec{a}_c = 0$

$$\begin{aligned} m\vec{a}_{O'} + m\vec{a}_c &= m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_{O'}) + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) = \\ &= m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (\vec{R}_{O'} + \overline{O'P})) = m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_P) = m\vec{a} \end{aligned}$$



$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a} - \vec{F}_A = m(-\vec{g} + \vec{a}) + M(\vec{g} - \vec{a}) = (M - m)(\vec{g} - \vec{a})$$

La Tension du fil est orientée selon  $(\vec{g} - \vec{a})$



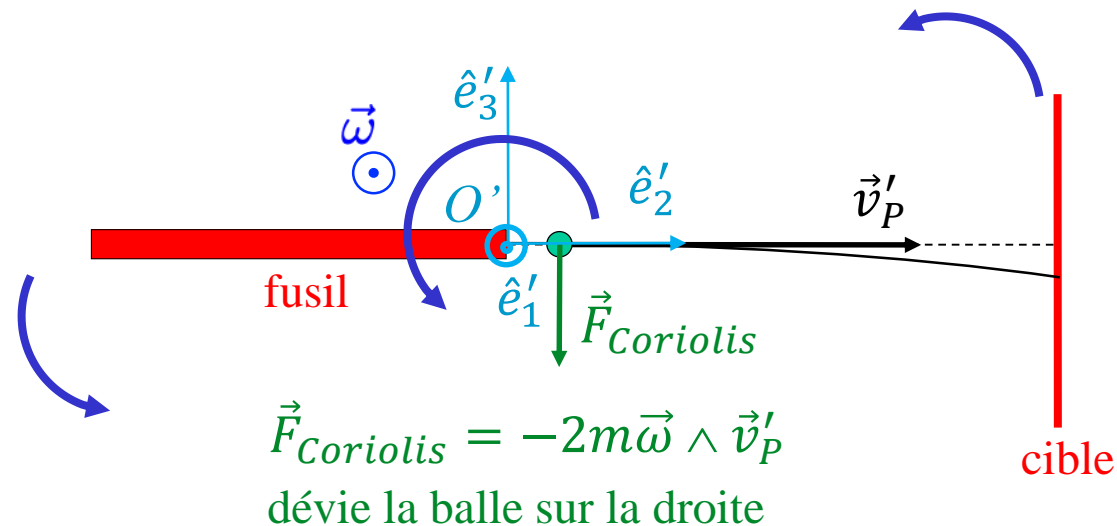
## 6.3 Ex.: Force de Coriolis



Gaspar Coriolis  
(1792–1843)

$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P})$$

Fusil - cible solidaires et tournants:  
vu de dessus dans le référentiel du fusil :



Dans le référentiel inertiel (à l'arrêt):

la balle suit un mouvement rectiligne uniforme, mais la cible est en train de tourner.

Le point d'impact se décale avec le temps

# 6.3 Ex.: Force de Coriolis

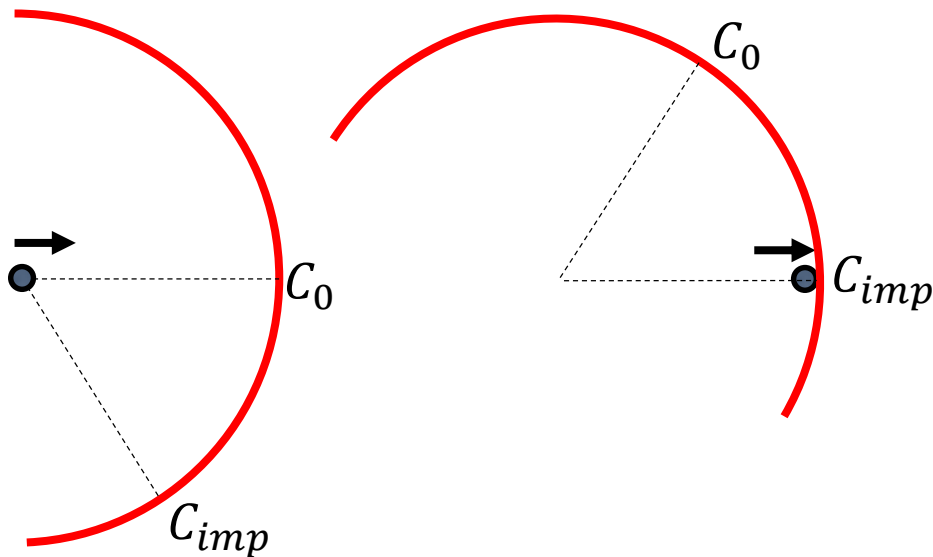
$$m\vec{a}'_P = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P})$$

Dans le référentiel inertiel (à l'arrêt):

la balle sort du fusil près du centre de rotation et donc elle suit un mouvement rectiligne uniforme;

la cible est en train de tourner.

Le point d'impact se décale avec le temps



$$v_P = 235 \frac{m}{s}; d = 1 m \Rightarrow t_{imp} = \frac{d}{v_P} \approx 5 ms$$

$$\text{Rotation de 1 tour chaque 2 s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} s^{-1} = \pi s^{-1}$$

$$C_0 - C_{imp} \approx \omega d t_{imp} \approx 1.5 cm$$

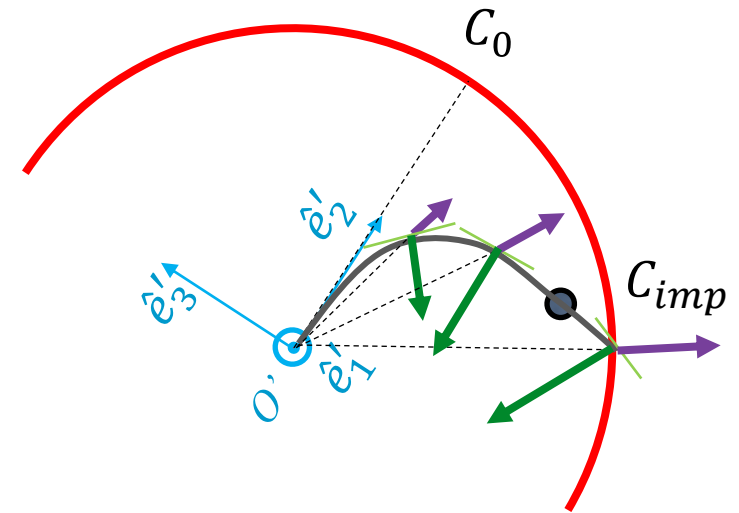
Fusil tournant vu de dessus

dans le référentiel du fusil:

à chaque instant il y a:

- la force de Coriolis  $-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P$

- la force centrifuge  $-m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P})$



## 6.4 Loi d'inertie et référentiels d'inertie

- Première loi de Newton (loi d'inertie) :

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins qu'une force n'agisse sur lui et ne le contraigne à changer d'état

NB: cette loi n'est pas valable dans tous les référentiels !

- On appelle **référentiel d'inertie** (ou absolu) un référentiel dans lequel la loi d'inertie est valable
- Dans ce référentiel :
  - Il n'y a pas de « forces d'inertie »; la deuxième loi de Newton est valable
  - Un référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est un référentiel d'inertie
  - Tous les référentiels d'inertie sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres

# 6.5 Référentiel terrestre

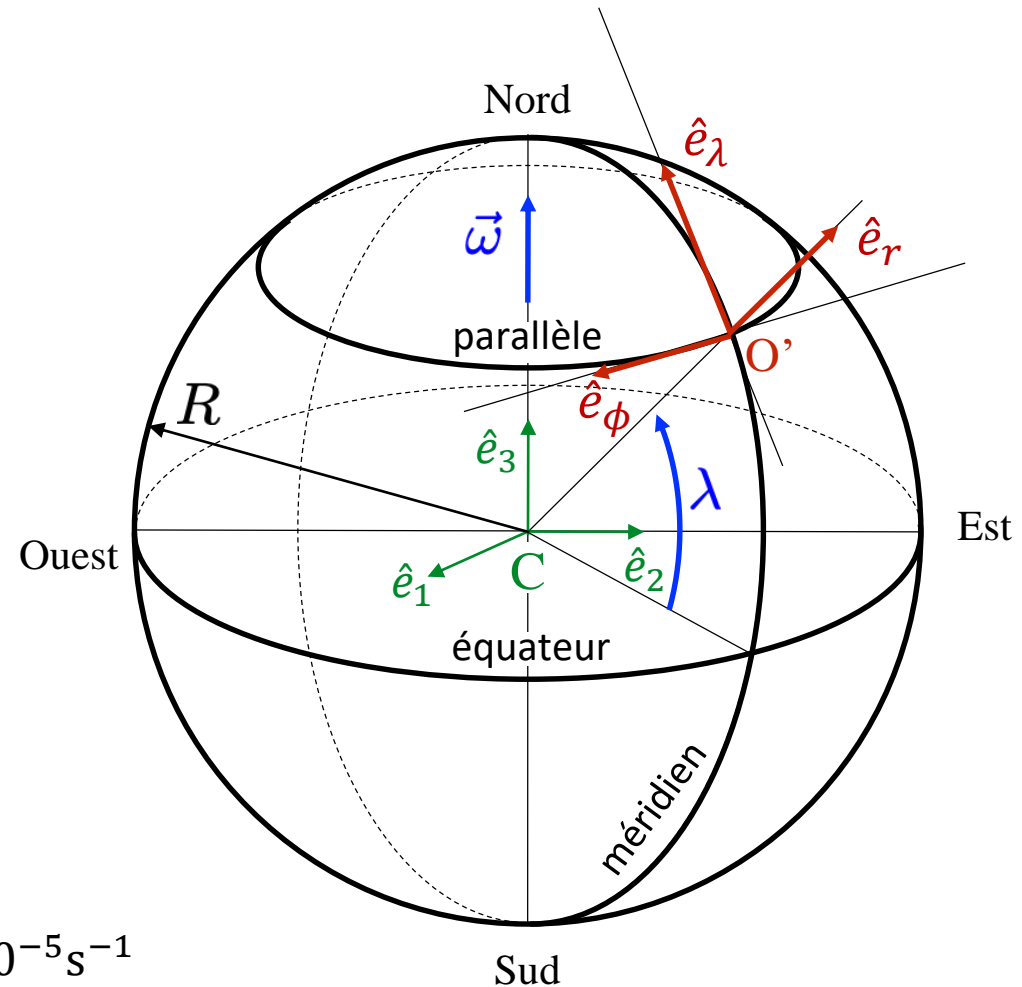
- On considère la Terre comme un « référentiel relatif » en mouvement de rotation uniforme  $\omega$  par rapport à un « référentiel absolu » défini par le centre de la Terre et trois étoiles fixes (on néglige ici le mouvement de la Terre autour du Soleil, ...)

- $C$  = centre de la Terre
- $O'$  = point sur la Terre à la latitude  $\lambda$   
( $\lambda=90^\circ$  au pôles et  $0^\circ$  à l'équateur)

- Repère  $O'\hat{e}_r\hat{e}_\lambda\hat{e}_\phi$  lié à la Terre  
(référentiel terrestre)

- Repère  $C\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$  lié au référentiel absolu
  - $\hat{e}_3$  pointe vers le nord

- Valeurs numériques:
  - rayon  $R = 6.37 \times 10^6 \text{m}$
  - vitesse angulaire  $\omega = 2\pi/\text{jour} = 7.27 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$



# 6.5 Dynamique terrestre: champ de pesanteur

- Dans le référentiel absolu (centre Terre + étoiles fixes):  $\vec{g}(\vec{r}) = \frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$
- dans le référentiel terrestre (repère  $O'\hat{e}_r\hat{e}_\lambda\hat{e}_\phi$ ):

A  $t = 0$  une masse  $m$  est lâchée à une hauteur  $h$  par rapport à  $O'$ :  $\vec{r}'(0) = 0$  et  $\vec{v}'(0) = 0$

Equation du mouvement :

$$m\vec{a}'_p = \sum \vec{F}^{ext} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_p + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + m\dot{\vec{\omega}} \wedge \overline{O'P})$$

$$m\vec{a}'_p = m\vec{g} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_p + m\vec{a}_{O'} + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + 0)$$

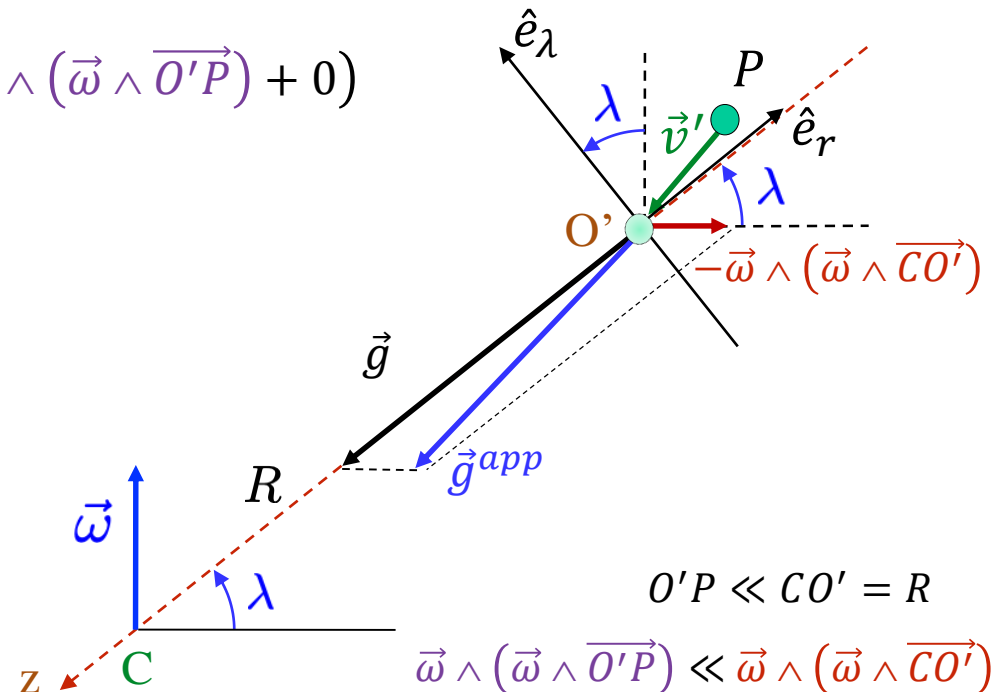
$$m\vec{a}'_p = m\vec{g} - (2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_p + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO'}) + m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{O'P}) + 0)$$

$$m\vec{a}'_p = m(\vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO'})) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_p$$

$$m\vec{a}'_p = m\vec{g}^{app} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_p$$

$$\vec{g}^{app} = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO'})$$

$\vec{g}^{app}$  est le champ de pesanteur apparent mesuré par l'observateur sur Terre



# 6.5 Champ de pesanteur terrestre

- On définit le « poids apparent »  $m\vec{g}^{app}$
- Ce poids apparent définit la verticale au point  $O'$  :
  - La verticale ne passe pas par le centre de la Terre (sauf si  $O'$  est aux pôles ou à l'équateur)

Champ de pesanteur apparent:  $\vec{g}^{app} = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO'})$

$$\vec{\omega} = \omega(\sin \lambda \hat{e}_r + \cos \lambda \hat{e}_\lambda)$$

$$\overline{CO'} = \vec{r} = R\hat{e}_r$$

$$\vec{\omega} \wedge \overline{CO'} = \omega R \cos \lambda \hat{e}_\lambda \wedge \hat{e}_r$$



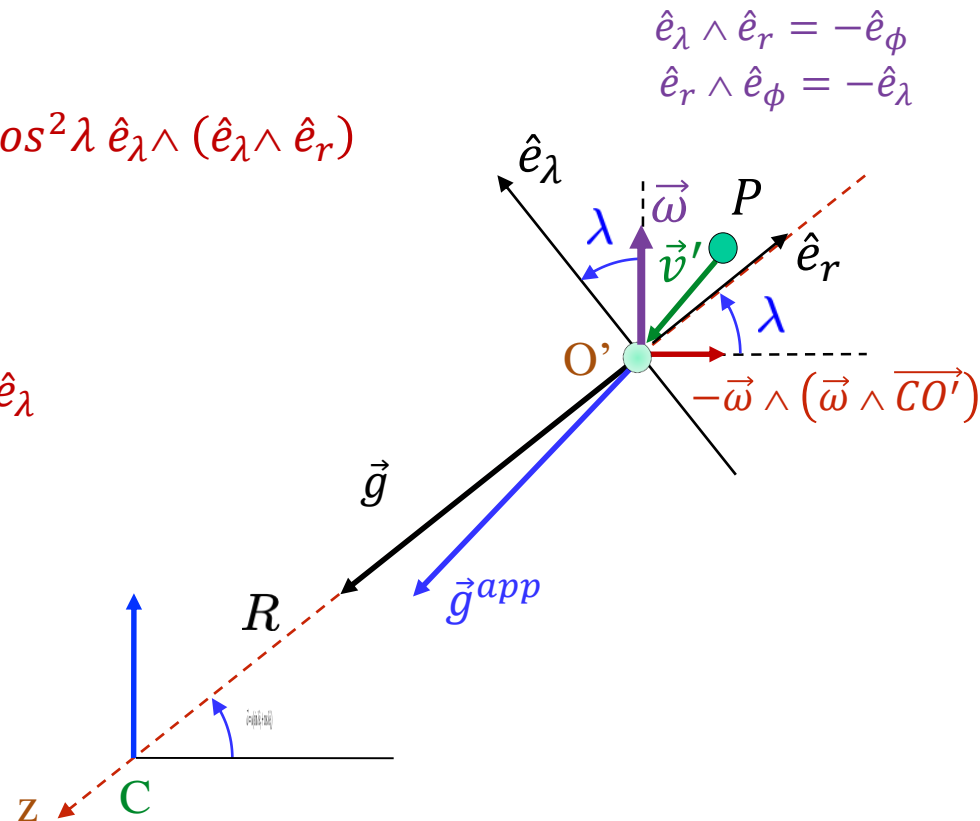
$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO'}) &= \omega^2 R (\sin \lambda \cos \lambda \hat{e}_r \wedge (\hat{e}_\lambda \wedge \hat{e}_r) + \cos^2 \lambda \hat{e}_\lambda \wedge (\hat{e}_\lambda \wedge \hat{e}_r)) \\ &= \omega^2 R (-\cos^2 \lambda \hat{e}_r + \sin \lambda \cos \lambda \hat{e}_\lambda) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{g}^{app} &= -g\hat{e}_r + \omega^2 R \cos^2 \lambda \hat{e}_r - \omega^2 R \sin \lambda \cos \lambda \hat{e}_\lambda \\ &= -g[(1 - \varepsilon \cos^2 \lambda)\hat{e}_r + \varepsilon \sin \lambda \cos \lambda \hat{e}_\lambda] \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 R}{g} \approx 0.0035$$

$\vec{g}^{app}$  est minimale à l'équateur ( $\lambda = 0$ )  
et maximale aux pôles ( $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$ )



# 6.5: Dynamique terrestre: chute libre

- On se place dans le référentiel terrestre (repère O'xyz)
- A  $t = 0$  une masse  $m$  est lâchée à une hauteur  $h$  par rapport à au point O' :
- $\vec{r}'(0) = 0$  et  $\vec{v}'(0) = 0$
- Equation du mouvement :

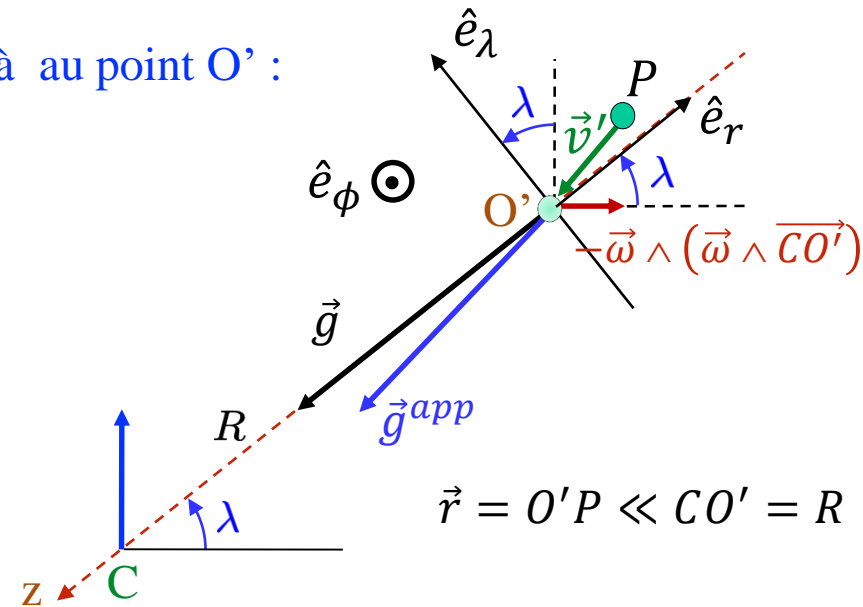
$$m\vec{a}'_P = m(\vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO'})) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P$$

$$m\vec{a}'_P = m\vec{g}^{app} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P$$

Base  $\begin{pmatrix} \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_\lambda \\ \hat{e}_r \end{pmatrix}$

$$\vec{g}^{app} = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{CO'}) = g \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon \cos \lambda \sin \lambda \\ 1 - \varepsilon \cos^2 \lambda \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}' = \vec{g}' - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$



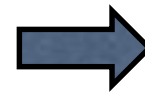
Vers l'est (dans l'hémisphère nord comme dans l'hémisphère sud)

Observateur sur une étoile fixe:

La distance du point P de C est  $R + h$

Sa vitesse est  $\omega(R + h)$  vers est

La vitesse du point O' sur la surface terrestre est  $\omega R < \omega(R + h)$



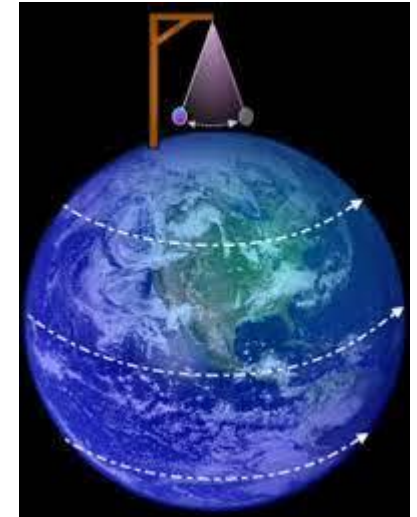
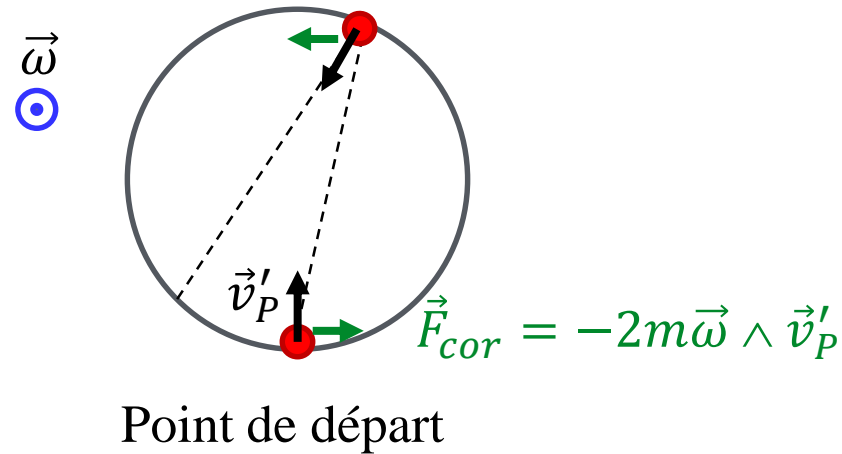
La masse  $m$  va tomber à est du point O'

Exemple:

$$h = 100 \text{ m et } \lambda = 46.5^\circ \text{ (Lausanne)} \Rightarrow x \hat{e}_\phi \approx -1.5 \text{ cm } \hat{e}_\phi \text{ et } y \hat{e}_\lambda \approx -17.5 \text{ cm } \hat{e}_\lambda$$

## 6.5: Pendule de Foucault

Vue d'en haut pour un observateur lié à la Terre:  
le plan d'oscillation tourne selon le sens "des aiguilles d'une montre"



Lorsqu'il oscille, la rotation de la Terre n'influence pas son point de fixation, et son plan d'oscillation reste fixe par rapport aux étoiles.

Par contre, pour un observateur lié à la Terre, le plan d'oscillation tourne de  $360^\circ$  dans le sens inverse de la rotation de la Terre (sens "des aiguilles d'une montre"), en un jour sidéral, soit 23h 56mn.

- pendule au pôle Sud de la Terre, son plan d'oscillation tourne dans l'autre sens, avec la même période.
- pendule à l'équateur, la rotation de la Terre n'influence pas son plan d'oscillation, qui reste fixe.